

**CORRIGÉ 1** Pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $x \mapsto x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée :  $x \mapsto nx^{n-1}$  pour tout entier  $n \geq 1$  »

**Initialisation** :  $\mathcal{P}(1)$  est vraie car la fonction dérivée de  $x \mapsto x$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction constante égale à  $1 = 1 \times x^{1-1}$ .

**Hérédité** : Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$  et montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

$x \mapsto x^{n+1} = x \times x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions dérivables et sa fonction dérivée est  $x \mapsto u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$  où  $u(x) = x$  et  $v(x) = x^n$ .

$u'(x) = 1$  d'après l'initialisation de la récurrence et  $v'(x) = nx^{n-1}$  d'après l'hypothèse de récurrence. La fonction dérivée de  $x \mapsto x^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$  est donc  $x \mapsto 1 \times x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$ , ce qui est  $\mathcal{P}(n+1)$ .

**Conclusion** :  $\mathcal{P}(1)$  est vraie (initialisation) et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a l'implication  $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$  (hérédité), donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

**CORRIGÉ 2** Exercice fondamental, correction en classe

**CORRIGÉ 3** Montrons par récurrence que la propriété  $P(n)$  : «  $S_n = \frac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n}$  » est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

• **Initialisation** :  $S_0 = u_0 = \frac{2 \times 0 - 1}{2^0} = -1$  et  $\frac{2^{0+1} - 2 \times 0 - 3}{2^0} = -1$  donc  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que  $P(n)$  est vraie.

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^n u_k = \frac{2(n+1) - 1}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n+1 + 2(2^{n+1} - 2n - 3)}{2^{n+1}} = \frac{2n+1 + 2^{n+2} - 4n - 6}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - 2(n+1) - 3}{2^{n+1}}$$

Ainsi  $P(n) \implies P(n+1)$

• **Conclusion** :  $P(n)$  est vraie pour  $n = 0$  et est héréditaire, donc est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**CORRIGÉ 4** Montrons par récurrence que la propriété  $P(n)$  : «  $S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$  » est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

• **Initialisation**.  $S_2 = 1 \times 2 = 2$  et  $\frac{1}{3}2(2-1)(2+1) = 2$  donc  $P(2)$  est vraie.

• **Hérédité**. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$  et supposons que  $P(n)$  est vraie.

$$S_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) \times k = n(n+1) + \sum_{k=2}^n (k-1) \times k = n(n+1) + \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) = n(n+1)(1 + \frac{1}{3}(n-1)) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \text{ Ainsi } P(n) \implies P(n+1)$$

•  $P(n)$  est vraie pour  $n = 2$  et est héréditaire, donc est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ .

CORRIGÉ 5 ①  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $-1$  et sa forme explicite est celle de l'énoncé. Son premier terme est  $a_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = -1 \times a_n$ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } a_0 + \dots + a_n = 1 \times \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

②  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = 3$  donc sa forme explicite est donnée pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $b_n = b_0 \times q^n = -1 \times 3^n$ . Sa relation de récurrence est celle de l'énoncé.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } b_0 + \dots + b_n = -1 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = -\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

③  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $r = \frac{1}{3}$  et sa forme explicite est celle de l'énoncé. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{3}$  et  $c_0 + \dots + c_n = (n+1) \times \frac{c_0 + c_n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$

④  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $r = 2$  donc sa forme explicite est donnée pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $d_n = d_0 + nr = -1 + 2n$ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, d_0 + \dots + d_n = (n+1) \times \frac{d_0 + d_n}{2} = n - 1$$

⑤  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  arithmétique de raison  $r$  donc  $e_8 = e_3 + (8-3)r$  soit  $20 = 5 + 5r$  soit  $r = 3$ . Son premier terme est  $e_0 = e_3 + (0-3)r = -4$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $e_n = e_0 + nr = -4 + 3n$  et  $e_{n+1} = e_n + 3$ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, e_0 + \dots + e_n = (n+1) \times \frac{e_0 + e_n}{2} = (n+1)\left(\frac{3}{2}n - 4\right)$$

⑥  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = 2$  donc  $f_3 = f_0 \times q^3$  soit  $128 = f_0 \times 2^3$  soit  $f_0 = 16$ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n = f_0 \times q^n = 16 \times 2^n \text{ et } f_{n+1} = 2f_n.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, f_0 + \dots + f_n = 16 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 16(2^{n+1} - 1)$$

⑦  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  arithmétique de raison 0 et aussi géométrique de raison 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n = 4$  et  $g_{n+1} = g_n$ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, g_0 + \dots + g_n = 4(n+1)$$

⑧  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  géométrique de raison  $q$  donc  $h_{12} = h_{10} \times q^{12-10}$  soit  $20 = 10 \times q^2$  soit  $|q| = \sqrt{2}$ .

$$h_{10} = h_0 \times q^{10} = h_0 \times (q^2)^5 = 32h_0 \text{ soit } h_0 = \frac{5}{16}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , selon que  $q = \sqrt{2}$  ou  $q = -\sqrt{2}$ , on a  $h_n = h_0 \times q^n = \frac{5}{16} \times \sqrt{2}^n$  ou l'opposé.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, h_0 + \dots + h_n = \frac{5}{16} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$